ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NINH THỊ LƯU

BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG HERMITE–HADAMARD–FEJÉR CHO HÀM P-LỒI

THÁI NGUYÊN – 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NINH THỊ LƯU

BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG HERMITE–HADAMARD–FEJÉR CHO HÀM P-LỒI

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN – 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid n-chiều
I	tập con của tập số thực $\mathbb{R}$
I°	phần trong của tập I
$L[a, b]$	không gian các hàm khả tích trên đoạn $[a, b]$

Mở đầu

Cho $f : C \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi xác định trên tập con C của tập số thực $\mathbb{R}$ và $a, b \in C$ với $a \neq b$. Bất đẳng thức

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

nổi tiếng được biết dưới tên gọi bất đẳng thức Hermite–Hadamard (xem [4]).

Hầu hết các bất đẳng thức nổi tiếng liên quan đến giá trị trung bình của tích phân của hàm lồi f đều ở dạng bất đẳng thức Hermite–Hadamard hoặc dạng trọng số của nó, bất đẳng thức Hermite–Hadamard–Féjer.

Trong [3], Fejér xây dựng bất đẳng thức, mang tên ông Fejér, mở rộng của bất đẳng thức Hermite–Hadamard (1):

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx, \tag{2}$$

ở đây $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm không âm, khả tích và đối xứng ứng với $\dfrac{a+b}{2}$.

Trong trường hợp hàm $f : C \subset (0; \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm p-lồi, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, và $a, b \in C$ với $a < b$, bất đẳng thức Hermite–Hadamard được xây dựng ở dạng

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{3}$$

nếu hàm f khả tích trên đoạn $[a, b]$.

Nhiều tác giả đã xây dựng các bất đẳng thức mới dạng Hermite–Hadamard–Féjer cho một số lớp hàm lồi khác nhau và đưa ra các ứng dụng đánh giá một số giá trị trung bình đặc biệt từ các bất đẳng thức này. Mục tiêu của đề tài luận văn là tìm hiểu và trình bày lại một số bất đẳng thức mới dạng Hermite–Hadamard–Féjer cho hàm p-lồi trong [6] và [7] công bố năm 2016 và 2017.

Luận văn ngoài phần mở đầu, kết luận, nội dung chính gồm 2 chương với bố cục cụ thể như sau:

Chương 1. Bất đẳng thức tích phân dạng Hermite–Hadamard–Féjer cho hàm lồi

Chương này giới thiệu một số kiến thức cơ bản của hàm lồi, hàm đối xứng và một số bất đẳng thức dạng Hermite–Hadamard–Féjer cho hàm lồi cùng một số ví dụ áp dụng. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1]–[8].

Chương 2. Bất đẳng thức tích phân dạng Hermite–Hadamard–Féjer cho hàm p-lồi

Chương này giới thiệu khái niệm hàm p-lồi, trình bày mối liên hệ giữa hàm p-lồi và hàm lồi và trình bày một số bất đẳng thức mới dạng Hermite–Hadamard–Féjer cho hàm p-lồi cùng một số áp dụng đánh giá một số bất đẳng thức khác. Nội dung của chương được tham khảo từ hai bài báo [6] và [7] công bố năm 2016 và 2017.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Lời đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô giáo PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Cô đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân và các đồng nghiệp trong thời gian làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2019

Tác giả luận văn

Ninh Thị Lưu

Chương 1

Bất đẳng thức tích phân dạng Hermite–Hadamard–Féjer cho hàm lồi

Chương này trình bày một số bất đẳng thức cho hàm lồi, hàm đối xứng được kết nối với bất đẳng thức tích phân dạng Hermite–Hadamard–Féjer. Nội dung của chương được viết trên cơ sở tổng hợp từ các tài liệu [1]–[8].

1.1 Hàm lồi. Hàm đối xứng

1.1.1 Hàm lồi

Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$. Tập tất cả các điểm $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ với $0 \le \lambda \le 1$ gọi là đoạn thẳng (đóng) nối a và b, và được ký hiệu là $[a, b]$.

Định nghĩa 1.1.1 (xem [1])**.** Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu nó chứa đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó; nói cách khác, nếu $(1-\lambda)a + \lambda b \in C$ với mọi $a, b \in C$ và mọi $0 \le \lambda \le 1$.

Ví dụ 1.1.2. Các tập sau đây đều là các tập lồi:

(a) Các tập afin, các siêu phẳng, các nửa không gian đóng, các nửa không gian mở.

(b) Hình cầu đóng tâm a bán kính $r > 0$: $\overline{B}(a, r) = \big\{x \in \mathbb{R} : \|x - a\| \le r\big\}$, hình cầu mở tâm a bán kính $r > 0$: $B(a, r) = \big\{x \in \mathbb{R} : \|x - a\| > r\big\}$.

Định nghĩa 1.1.3 (xem [1])**.** Hàm $f : C \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập hợp lồi $C \subseteq \mathbb{R}^n$

gọi là một hàm lồi trên C nếu với mọi $x^1, x^2 \in C$ và mọi số thực $\lambda \in [0,1]$ ta có

$$f\left[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\right] \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

Hàm f gọi là hàm lồi chặt trên C nếu với mọi $x^1, x^2 \in C$, $x^1 \neq x^2$ và mọi $\lambda \in (0,1)$ ta có

$$f\left[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\right] < (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

Hiển nhiên một hàm lồi chặt là hàm lồi, nhưng điều ngược lại nói chung không đúng.

Định nghĩa 1.1.4 (xem [1])**.** Hàm f gọi là một hàm lõm (lõm chặt) trên C nếu $-f$ là hàm lồi (lồi chặt) trên C.

Nếu $n = 1$, Định nghĩa 1.1.3 cho ta định nghĩa về hàm lồi một biến trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.5 (xem [1])**.** Hàm $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi nếu với mọi $x^1, x^2 \in [a,b]$ và $\lambda \in [0,1]$ thì

$$f\left[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right] \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2). \tag{1.1}$$

Tính chất 1.1.6. Một số phép toán cơ bản bảo toàn hàm lồi:

(a) Nếu $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi thì $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m$ cũng là hàm lồi với mọi $\alpha_i \geq 0$ và là hàm lồi chặt nếu ít nhất một trong các hàm f_i lồi chặt với $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$.

(b) Nếu $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$, là hàm lồi thì $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ cũng là hàm lồi, ở đây I là tập chỉ số.

(c) Nếu $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ tuyến tính và $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi thì hàm hợp $f(x) = g(Ax)$ cũng là hàm lồi.

Định lý 1.1.7 (xem [1])**.** *Cho C là một tập lồi, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi. Khi đó, mọi điểm cực tiểu địa phương của f trên C đều là cực tiểu toàn cục.*

Chứng minh. Giả sử $x_0 \in C$ là một điểm cực tiểu địa phương của hàm f trên C và $U(x_0)$ là một lân cận của x_0 sao cho $f(x_0) \leq f(x)$ với mọi $x \in C \cap U(x_0)$. Khi đó, với mọi $x \in C$ ta có

$$x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)x_0 \in C \cap U(x_0) \quad \text{với mọi } \lambda > 0 \text{ đủ bé.}$$

Suy ra,

$$f(x_0) \le f(x_\lambda) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_0)$$

hay $f(x_0) \le \lambda f(x)$. Do $\lambda > 0$ nên $f(x_0) \le f(x)$. Vì $x \in C$ được chọn tùy ý nên x_0 là điểm cực tiểu toàn cục của f trên C. □

Định lý 1.1.8 (xem [1])**.** *Một hàm lồi chặt f trên một tập lồi C có nhiều nhất một điểm cực tiểu trên C.*

Chứng minh. Nếu f có hai điểm cực tiểu khác nhau $x^1, x^2 \in C$ thì do tính lồi chặt của f,

$$f\left(\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2\right) < f(x^1) = f(x^2),$$

điều này vô lý. □

Ví dụ 1.1.9. Hàm lồi chặt một biến $f(x) = x^2$ có duy nhất một điểm cực tiểu $x_0 = 0$. Hàm lồi chặt $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ không có điểm cực tiểu nào.

1.1.2 Hàm đối xứng

Định nghĩa 1.1.10 (xem [7])**.** Một hàm $w : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là đối xứng ứng với $\dfrac{a+b}{2}$ nếu

$$w(x) = w(a + b - x) \quad \forall x \in [a, b]. \tag{1.2}$$

Ví dụ 1.1.11. Các hàm $w_1, w_2 : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$w_1(x) = c,\ c \in \mathbb{R}, \quad w_2(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

là các hàm đối xứng ứng với $\dfrac{a+b}{2}$.

Định nghĩa 1.1.12 (xem [5])**.** Cho $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ là một khoảng thực. Hàm $f : I \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi điều hòa nếu

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \le tf(y) + (1-t)f(x) \tag{1.3}$$

với mọi $x, y \in I$ và $t \in [0, 1]$. Nếu bất đẳng thức (1.3) đổi chiều thì hàm f được gọi là hàm lõm điều hòa.

Ví dụ 1.1.13. Cho $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ và $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ thì f là hàm lồi điều hòa và g là hàm lõm điều hòa.

Định nghĩa 1.1.14 (xem [7])**.** Hàm $w : [a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm đối xứng điều hòa ứng với $\dfrac{2ab}{a+b}$ nếu

$$w(x) = w\Big(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{x}}\Big), \quad \forall x \in [a,b]. \tag{1.4}$$

Ví dụ 1.1.15. Các hàm $w_1, w_2 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$w_1(x) = c,\ c \in \mathbb{R}, \quad w_2(x) = \Big(\frac{1}{x} - \frac{a+b}{2ab}\Big)^2$$

là các hàm đối xứng đối điều hòa ứng với $\dfrac{2ab}{a+b}$.

1.2 Bất đẳng thức Hermite–Hadamard–Féjer

1.2.1 Bất đẳng thức tích phân dạng Hermite–Hadamard–Féjer

Cho $f : C \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi xác định trên tập con C của tập số thực $\mathbb{R}$ và $a, b \in C$ với $a < b$. Bất đẳng thức

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.5}$$

nổi tiếng được biết dưới tên gọi bất đẳng thức Hermite–Hadamard (xem [4]).

Trong trường hợp hàm f là hàm khả vi lồi, bất đẳng thức dạng Hermite–Hadamard được xây dựng như sau.

Bổ đề 1.2.1 (xem [6])**.** *Cho $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ khả vi trên I° và $a, b \in I^\circ$ với $a < b$. Nếu hàm f' khả tích trên $[a,b]$ thì bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{1.6}$$

Sử dụng Bổ đề 1.2.1, Dragomir [6] thu được hai bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm lồi được trình bày trong các định lý dưới đây.

Định lý 1.2.2 (xem [6])**.** *Cho $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ khả vi trên I° và $a, b \in I^\circ$ với $a < b$. Nếu $|f'|$ lồi trên $[a,b]$ thì bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}. \tag{1.7}$$